Modèles à base d'opérateurs pour les systèmes $(\max, +)$ cycliques

MSR'19 Angers

B.Cottenceau, L.Hardouin, J.Trunk

Novembre 2019

Introduction

Ce travail porte sur l'étude des systèmes (max,$+$)

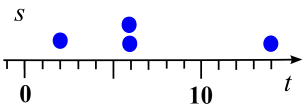
- Opérateurs pour les GET ordinaires $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$:[Cohen et al.(89)]
- Outils de calcul : librairie Maple [Gaubert(92)], librairie MinMaxGD/C++ [Hardouin(06)]
- GET valués / opérateurs : GET fluides [Cohen et al.(98)], [Hamaci(05)], [Cottenceau et al.(09)]
- GET à synchro. partielle : [David-Henriet (15)], [Trunk(19)]

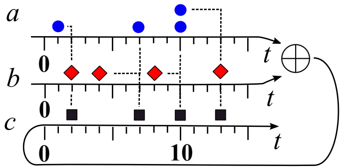
Contribution: survol de modèles reposant sur des opérateurs, librairie C++ ETVO (Event-variant and Time-Variant Operators) [projet RFI Atlanstic 2020].

Contexte

Signaux ($\in \Sigma$) : séquences d'événements $\{(e_k, t_k)\}$.
Synchronisation de signaux: $\{a\} \oplus \{b\} = \{c\}$.

$$\{(a_k, t_k)\} \oplus \{(b_k, \tau_k)\} = \{(c_k, \max(t_k, \tau_k))\}$$





Ex.: signal $\{s\} = \{(s_0, 2), (s_1, 6), (s_2, 6), \dots\}$.

Opérateur: application w qui transforme un signal $s \in \Sigma$

$$\begin{aligned} w \quad : \quad & \Sigma \to \Sigma \\ & s \mapsto w(s). \end{aligned}$$

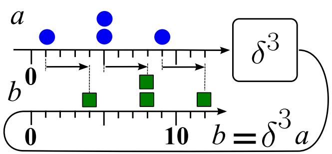
Dioïde d'opérateurs additifs

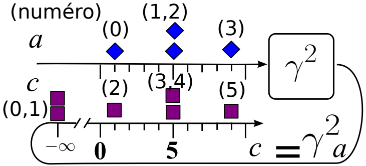
Un opérateur w est dit *additif* si $\forall a, b \in \Sigma, w(a \oplus b) = w(a) \oplus w(b)$.

Dioïde $(\mathcal{O}, \oplus, \circ)$

L'ensemble des opérateurs additifs, muni de la synchronisation et de la composition est un dioïde (non commutatif) noté $(\mathcal{O}, \oplus, \circ)$.

Opérateurs δ^τ et γ^ν [Cohen et al.(89)] : décalage temporel/événementiel

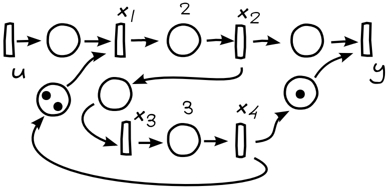


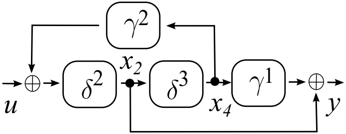


$$\gamma^n \circ \delta^t = \gamma^n \delta^t = \delta^t \gamma^n \qquad \delta^{t_1}\delta^{t_2} = \delta^{t_1+t_2} \qquad \delta^{t_1} \oplus \delta^{t_2} = \delta^{\max(t_1,t_2)}$$

$$\gamma^{n_1}\gamma^{n_2} = \gamma^{n_1+n_2} \qquad \gamma^{n_1} \oplus \gamma^{n_2} = \gamma^{\min(n_1,n_2)}$$

Transfert de Graphes d'Evénements Temporisés





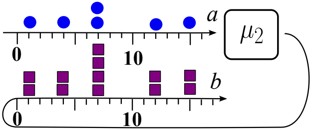
La **dynamique** : $\{x = Ax \oplus Bu,\ y = Cx\}$, où x sont les signaux internes, u l'entrée et y la sortie. Le **transfert** est $y = CA^*Bu$.

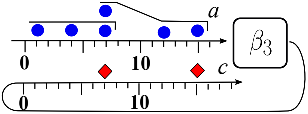
$$A = \begin{pmatrix} . & . & . & \gamma^2 \\ \delta^2 & . & . & . \\ . & e & . & . \\ . & . & \delta^3 & . \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} . & e & . & \gamma^1 \end{pmatrix}.$$

$$y = CA^*Bu = (\delta^2 \oplus \gamma^1\delta^5)(\gamma^2\delta^5)^*u.$$

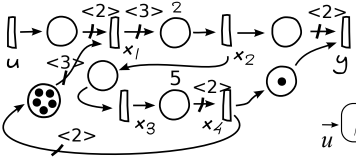
Multiplication/Division [événements] [Cottenceau et al.(09)]

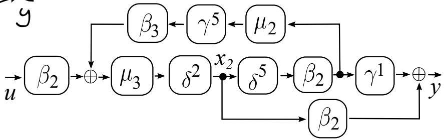
Les opérateurs μ_m (multiplication) et β_b (lot de taille b) sont additifs.





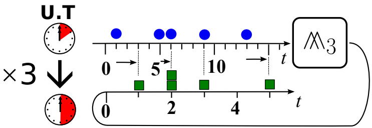
GET valués : composition/synchronisation d'opérateurs $\delta^\tau, \gamma^\nu, \mu_m, \beta_b$

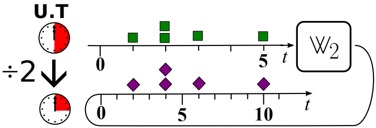




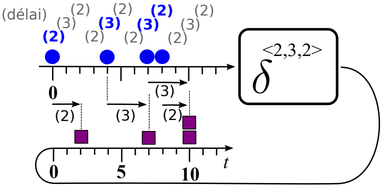
Multiplication/Division [temps] [Trunk(18)]

Les opérateurs $\mathbb{M}_d$ (division des dates) et $\mathbb{W}_m$ (multiplication) sont additifs.





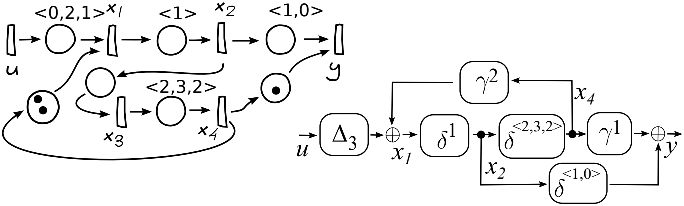
L'opérateur $\Delta_T = \mathbb{W}_T \mathbb{M}_T$ synchronise sur les dates multiples de T.



Exemple: retard *time-variant* $\delta^{\langle 2,3,2 \rangle} = \delta^2 \Delta_3 \delta^{-2} \oplus \delta^1 \Delta_3$

GET à temps de séjour variable [Trunk(18)]

Le temps de séjour d'une place varie cycliquement dans le temps.
Remarque: $\delta^{\langle 0,2,1\rangle} = \Delta_3$.



$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \gamma^2 \\ \delta^1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & e & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \delta^{\langle 2,3,2\rangle} & \cdot \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \Delta_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \cdot & \delta^{\langle 1,0\rangle} & \cdot & \gamma^1 \end{pmatrix}.$$

Les identités

L'opérateur $e : x \mapsto x$ s'écrit $e = \gamma^0 = \delta^0 = \mu_1 = \beta_1 = \mathbb{W}_1 = \mathbb{M}_1$.

$$
\begin{array}{rclrclrcll}
\gamma^1\delta^1 & = & \delta^1\gamma^1 & \gamma^n\gamma^{n'} & = & \gamma^{n+n'} & \delta^t\delta^{t'} & = & \delta^{t+t'} & (f1) \\
\gamma^n \oplus \gamma^{n'} & = & \gamma^{\min(n,n')} & \delta^t \oplus \delta^{t'} & = & \delta^{\max(t,t')} & & & & (f2) \\
\mu_m\delta^1 & = & \delta^1\mu_m & \beta_b\delta^1 & = & \delta^1\beta_b & \beta_m\mu_m & = & e & (f3) \\
\mathbb{W}_m\,\gamma^1 & = & \gamma^1\mathbb{W}_m & \mathbb{M}_d\,\gamma^1 & = & \gamma^1\mathbb{M}_d & \mathbb{M}_m\mathbb{W}_m & = & e & (f4) \\
\mu_m\mu_{m'} & = & \mu_{m\times m'} & \beta_b\beta_{b'} & = & \beta_{b\times b'} & & & & (f5) \\
\mathbb{W}_m\mathbb{W}_{m'} & = & \mathbb{W}_{m\times m'} & \mathbb{M}_d\mathbb{M}_{d'} & = & \mathbb{M}_{d\times d'} & & & & (f6) \\
\mu_m\gamma^1 & = & \gamma^m\mu_m & \gamma^1\beta_b & = & \beta_b\gamma^b & & & & (f7) \\
\mathbb{W}_m\,\delta^1 & = & \delta^m\mathbb{W}_m & \delta^1\mathbb{M}_d & = & \mathbb{M}_d\,\delta^d & & & & (f8)
\end{array}
$$

Modèles à base d'opérateurs dans $\{\gamma^\nu, \delta^\tau, \mu_m, \beta_b, \mathbb{W}_m, \mathbb{M}_d\}$

GET valué consistant [T-invariant]

Le transfert $H = CA^*B$ s'écrit $H = p \oplus q(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$ avec p, q de la forme

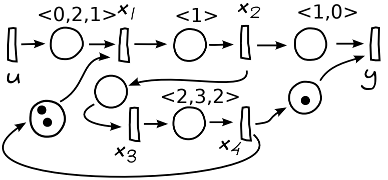
$$p = \bigoplus_{i=1}^{v} \gamma^{n_i}\mu_m\gamma^{N_i}\delta^{T_i}\beta_b\gamma^{n'_i} \text{ avec } 0 \leq n_i < m \text{ et } 0 \leq n'_i < b.$$

GET à temps de séjour cyclique

Le transfert $H = CA^*B$ s'écrit $H = p \oplus q(\delta^\tau\gamma^\nu)^*$ avec p, q de la forme

$$p = \bigoplus_{i=1}^{v} \delta^{t_i} \ \mathbb{W}_T \, \delta^{T_i}\gamma^{N_i} \ \mathbb{M}_T \, \delta^{t'_i} \text{ avec } -T < t_i, t'_i \leq 0.$$

ETVO:librairie C++



$$A = \begin{pmatrix} . & . & . & \gamma^2 \\ \delta^1 & . & . & . \\ . & e & . & . \\ . & . & \delta^{\langle 2,3,2\rangle} & . \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \Delta_3 \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} . & \delta^{\langle 1,0\rangle} & . & \gamma^1 \end{pmatrix}.$$

$$H = \delta^{-1}\Delta_6 \oplus \delta^1\Delta_6\delta^{-3} \oplus \left[\delta^4\Delta_3\gamma^1 \oplus (\delta^3\Delta_6 \oplus \delta^5\Delta_6\delta^{-3})\gamma^2\right](\delta^3\gamma^2)^*$$

```
#include"etvo.h"
using namespace etvo;
int main(){  matrix<seriesTg> A(4,4),B(4,1),C(1,4);
  B(0,0)=tD(3); C(0,1)=td({1,0}); C(0,3)=tg(1); A(0,3)=tg(2);
  A(1,0)=td(1); A(2,1)=td(0); A(3,2)=td({2,3,2});
  matrix<seriesTg> H=C*A.star()*B;
  std::cout << "H=" << H(0,0) << "\n";
}
```

Pourquoi "Systèmes cycliques" ?

- GET ordinaires = systèmes (max,+) linéaires [event/time invariant]

$$H\gamma^1 = \gamma^1 H \text{ et } H\delta^1 = \delta^1 H$$

la réponse à $\gamma^n \delta^t u$ est la réponse à u décalée $\left(H(\gamma^n \delta^t u) = \gamma^n \delta^t (Hu)\right)$.

- GET valués consistants [event-variant] = systèmes $(n, n')-$cycliques

$$H\gamma^1 \neq \gamma^1 H \text{ mais } \exists n, H\gamma^n = \gamma^{n'} H \text{ et } H\delta^1 = \delta^1 H$$

la réponse à l'entrée u et à $\gamma^1 u$ non comparables

- GET à temps de séjour cyclique [time-variant] = systèmes $T-$cycliques

$$H\delta^1 \neq \delta^1 H \text{ mais } \exists T, H\delta^T = \delta^T H \text{ et } H\gamma^1 = \gamma^1 H$$

la réponse à l'entrée u et à $\delta^1 u$ non comparables

Conclusion

La librairie ETVO permet le calcul de transfert et la synthèse de correcteurs (résiduation) pour des systèmes qui généralisent les GET ordinaires (GET valués et à temps de séjour variables).

- ETVO : étendre aux systèmes à gain temporel $\neq 1$ (systèmes avec différentes horloges)
- ETVO: implémenter les calculs pour les systèmes event-variant ET time-variant (thèse de J.Trunk)
- Chercher des méthodes de calcul plus efficace, quitte à faire du calcul approché
- lien avec les graphes à flots de données synchrones (Synchronous DataFlow Graphs)