

# Analyse d'atteignabilité des systèmes $(\max, +)$ -linéaires à l'aide des polyèdres tropicaux\*

Guilherme E. Winck<sup>1</sup>, Mehdi Lhommeau<sup>2</sup> et Laurent Hardouin<sup>3</sup>

<sup>1</sup> LARIS - Université d'Angers, Angers, France  
guilherme.espindolawinck@univ-angers.fr

<sup>2</sup> LARIS - Université d'Angers, Angers, France  
mehdi.lhommeau@univ-angers.fr

<sup>3</sup> LARIS - Université d'Angers, Angers, France  
laurent.hardouin@univ-angers.fr

## Résumé

Les Systèmes à Evénements Discrets (SED) peuvent être définis comme des systèmes dans lesquels les variables d'état changent sous l'occurrence d'événements au fil du temps. Les SED mettant en jeu des phénomènes de synchronisation peuvent être modélisés par des équations linéaires dans les algèbres de type  $(\max, +)$ . Dans ce papier, on s'intéresse au problème de l'atteignabilité des SED décrits dans l'algèbre  $(\max, +)$ . L'objectif est de déterminer l'ensemble atteignable des SED décrits dans l'algèbre  $(\max, +)$ , c'est-à-dire l'obtention de toutes les trajectoires d'état générées à partir d'un domaine d'état initial. L'approche proposée repose sur la théorie des polyèdres tropicaux.

## 1 Contexte

Les systèmes à événements discrets (SED) temporisés comportant des phénomènes de synchronisation et des retards peuvent être décrits au moyen de modèles  $(\max, +)$ -linéaires. Le comportement dynamique de cette classe de SED peut être modélisé par des Graphes d'Événements Temporisés (GET). La connaissance *à priori* de l'espace atteignable contribue à la résolution de plusieurs problèmes dans le domaine de l'automatique des systèmes dynamiques à événements discrets décrits dans l'algèbre  $(\max, +)$ . Par exemple, la vérification de la sûreté de fonctionnement, l'analyse de performances, la commande robuste, etc... En pratique, le calcul exact de cet espace d'état est difficile. Récemment [1] le problème de l'analyse d'atteignabilité pour les systèmes  $(\max, +)$ -linéaire (MPL) a été, proprement, résolu en décomposant le système MPL en une combinaison de systèmes affines par morceaux où les composantes affines du système sont représentées par des matrices de différences bornées (Difference Bound Matrix, DBM). Dans ce papier, nous montrons que les polyèdres tropicaux permettent de résoudre de manière élégante ce problème.

## 2 Algèbre tropicale

Soit  $\mathbb{R}_{\max}$  l'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  muni des lois  $\oplus$  et  $\otimes$  définies par  $x \oplus y = \max(x, y)$  et  $x \otimes y = x + y$ . L'algèbre  $(\max, +)$  est le semi-anneau  $(\mathbb{R}_{\max}, \oplus, \otimes)$  où les éléments neutres pour l'addition  $\oplus$  et la multiplication  $\otimes$  sont notés, respectivement,  $\varepsilon = -\infty$  et  $e = 0$ . L'addition et la multiplication peuvent être étendues aux vecteurs et matrices de  $\mathbb{R}^n$  :  $\mathbf{v} \oplus \mathbf{w} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \oplus (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) = (\mathbf{v}_1 \oplus \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{v}_n \oplus \mathbf{w}_n)$ ,  $\alpha \otimes \mathbf{v} = (\alpha \otimes \mathbf{v}_1, \dots, \alpha \otimes \mathbf{v}_n)$  et  $(AB)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj}$ .

\*Ce travail a été soutenu par le biais du programme RFI Atlanstic 2020.

Soient les sous-ensemble  $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}_{\max}^n$ , on appelle somme de Minkowski  $S_1 \oplus S_2$ , l'ensemble  $\{\mathbf{s}_1 \oplus \mathbf{s}_2 \mid \mathbf{s}_1 \in S_1, \mathbf{s}_2 \in S_2\}$ . Un vecteur  $\mathbf{a}$  est une combinaison linéaire de l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^m$  si  $\mathbf{a} = \bigoplus_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{b}^i$  avec les  $\alpha_i \in \mathbb{R}_{\max}$ . Le cône engendré par  $A$ , noté  $\text{cone}(A)$ , est l'ensemble de toutes les combinaisons (finies) linéaires des éléments de  $A$ . Un vecteur  $\mathbf{a}$  est une combinaison convexe d'un ensemble de vecteurs  $\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^m$  si  $\mathbf{a} = \bigoplus_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{b}^i$  avec les  $\alpha_i \in \mathbb{R}_{\max}$  tels que  $\bigoplus_{i=1}^m \alpha_i = e$ . On définit l'enveloppe convexe, notée  $\text{co}(A)$ , comme l'ensemble de toutes les combinaisons convexes des éléments de  $A$ .

### 3 Représentations des polyèdres tropicaux

Il y a une grande similitude entre la théorie des polyèdres tropicaux et les polyèdres généraux. En effet, les polyèdres tropicaux peuvent être définis comme l'intersection d'un ensemble fini de demi-espaces tropicaux décrits par des inégalités de la forme  $\mathbf{a}\mathbf{x} \oplus b \leq \mathbf{c}\mathbf{x} \oplus d$ , où  $\mathbf{a}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}_{\max}^{1 \times n}$  et  $b, d \in \mathbb{R}_{\max}$ <sup>1</sup>. On parle de représentation externe. Par l'intermédiaire de l'équivalent tropicale [2] du théorème de Minkowski-Weyl, on peut définir un polyèdre tropical  $\mathcal{P}_0$  comme la somme de l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points et d'une enveloppe conique, *i.e.*,

$$\mathcal{P}_0 = \text{co}(V) \oplus \text{cone}(W),$$

où  $V = \{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^p\}$ ,  $W = \{\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^q\}$  et  $V, W \subseteq \mathbb{R}_{\max}^n$  sont des ensembles finis des points tels que  $\lambda_1 \mathbf{v}^1 \oplus \dots \oplus \lambda_p \mathbf{v}^p \oplus \gamma_1 \mathbf{w}^1 \oplus \dots \oplus \gamma_q \mathbf{w}^q$ , où  $\bigoplus_{i=1}^p \lambda_i = e$  et  $\gamma_1, \dots, \gamma_q \in \mathbb{R}_{\max}$ . On parle de représentation interne.

Dans [1] les auteurs proposent d'utiliser les matrices à différences bornées (nous dirons DBM pour Difference Bound Matrix) pour représenter certains polyèdres tropicaux. Les DBM ne permettent de représenter que des polyèdres tropicaux qui sont convexes au sens de l'algèbre ordinaire. En effet, une DBM est une matrice permettant de représenter un ensemble d'inégalités de la forme  $x_i - x_j < c$  ou  $x_i - x_j \leq c$  et  $x_0 = 0$ . On peut exprimer une contrainte de la forme  $x_i - x_j > c$  par  $x_j - x_i < -c$ . La constante  $x_0 = 0$  permet d'exprimer des contraintes de la forme  $x_i < c$  par  $x_i - x_0 < c$ . Les DBM sont très utilisées en vérification de modèles.

La représentation externe des polyèdres tropicaux est similaire à la représentation des DBM. On peut toujours représenter une DBM par un polyèdre tropical [5]. Par exemple, si on considère les inégalités  $x_1 \leq n$  et  $x_1 - x_2 \leq n$ . On a, pour la première  $x_1 \leq n \iff e \otimes x_1 \oplus \varepsilon \otimes x_2 \oplus \varepsilon \leq \varepsilon \otimes x_1 \oplus \varepsilon \otimes x_2 \oplus e \otimes n$ , de même pour la seconde inégalité  $x_1 - x_2 \leq n \iff x_1 \leq x_2 + n \iff e \otimes x_1 \oplus \varepsilon \otimes x_2 \oplus \varepsilon \leq \varepsilon \otimes x_1 \oplus n \otimes x_2 \oplus \varepsilon$ . Que l'on peut mettre sous la forme  $\mathbf{A}\mathbf{x} \oplus \mathbf{b} \leq \mathbf{C}\mathbf{x} \oplus \mathbf{d}$ ,

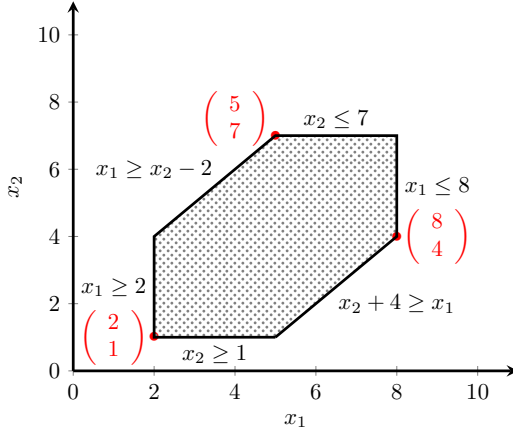
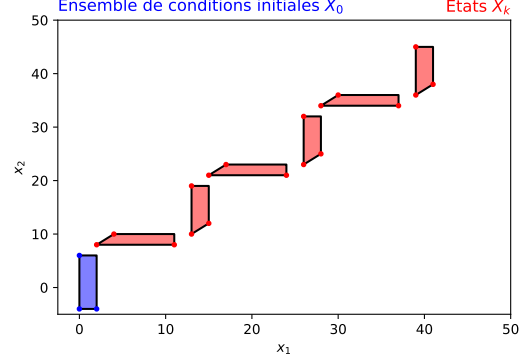
$$\begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ e & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} n \\ \varepsilon \end{pmatrix}.$$

#### 3.1 Exemple

Soit le polyèdre  $\mathcal{P}_0$  (cf. Fig 1) défini par les inégalités qui suivent :

$$\mathcal{P}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^2 : x_2 + 4 \geq x_1, x_1 \geq x_2 - 2, x_1 \leq 8, x_1 \geq 2, x_2 \leq 7, x_2 \geq 1\}, \quad (1)$$

1. Contrairement à l'algèbre ordinaire, en algèbre (max,+) un système d'inégalités peut être représenté comme un système d'égalité (et vice versa), en effet nous avons  $a \geq b \iff a = a \oplus b$ . Par conséquent, on peut représenter un polyèdre tropical par un système d'égalité.

FIGURE 1 – Polyèdre  $\mathcal{P}_0$ FIGURE 2 – Le polyèdre tropical  $\mathcal{P}_0$  qui représente la région  $\mathcal{X}_0$  et l'ensemble  $\mathcal{P}_k$  qui représente les régions  $\mathcal{X}_k$  (Atteignabilité directe).

ou de manière équivalente [2] par

$$\mathcal{P}_0 = \text{co} \left( \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) \oplus \text{cone} \left( \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \right\} \right). \quad (2)$$

Les vecteurs de l'ensemble  $\text{co}(\dots)$  correspondent aux points *extrêmes du polyèdre*  $\mathcal{P}_0$  [4].

## 4 Atteignabilité

Soit le système dynamique autonome (max,+)-linéaire

$$\mathbf{x}(k) = F \otimes \mathbf{x}(k-1), \quad (3)$$

avec  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}_0 \subseteq \mathbb{R}_{\max}^n$  et  $F \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  et où  $\mathcal{X}_0$  est l'ensemble des conditions initiales des états du système. Soit  $\mathcal{X}_0$  l'ensemble des conditions initiales, l'ensemble atteignable  $\mathcal{X}_k$  est défini [1] de façon récursive comme l'image de  $\mathcal{X}_{k-1}$  par rapport à l'équation dynamique du système (max,+)-linéaire  $\mathcal{X}_k = \ell(\mathcal{X}_{k-1}) = \{F \otimes \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{X}_{k-1}\} = F \otimes \mathcal{X}_{k-1}$ <sup>2</sup>. Le calcul de l'ensemble  $\mathcal{X}_k$  se base sur la représentation interne d'un polyèdre tropical. En effet, soient  $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{P}_0 = \text{co}(V) \oplus \text{cone}(W)$  et  $f : \mathbb{R}_{\max}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^n$  une application linéaire. On a  $\mathcal{P}_1 = f(\mathcal{P}_0) = f(\text{co}(V)) \oplus f(\text{cone}(W)) = \text{co}(f(V)) \oplus \text{cone}(f(W))$  où  $\mathcal{P}_1$  est un polyèdre tropical. Ceci peut être réitéré et finalement on obtient  $\mathcal{X}_k \subseteq f(\mathcal{P}_{k-1})$ . Soit le système dynamique (3) avec  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{P}_0$ , on peut calculer  $\mathcal{P}_1 = f(\mathcal{P}_0) = F(\lambda_1 \mathbf{v}^1) \oplus \dots \oplus F(\lambda_p \mathbf{v}^p) \oplus F(\gamma_1 \mathbf{w}^1) \oplus \dots \oplus F(\gamma_q \mathbf{w}^q) = \lambda_1 F(\mathbf{v}^1) \oplus \dots \oplus \lambda_p F(\mathbf{v}^p) \oplus \lambda_1 F(\mathbf{w}^1) \oplus \dots \oplus \lambda_p F(\mathbf{w}^p)$ . Finalement, on a  $\mathcal{X}_1 = \{F \otimes \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{X}_0\} \subseteq \mathcal{P}_1$ .

2. L'opérateur  $\ell$  est parfois appelé *Post* dans la littérature [3].

## 4.1 Exemple

Soit le système (3) avec  $F = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & e \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^2 : 0 \leq x_1 \leq 2, -4 \leq x_2 \leq 6\} \subseteq \mathcal{P}_0$  l'ensemble des conditions initiales. La représentation interne du polyèdre  $\mathcal{P}_0$  est donnée par

$$\mathcal{P}_0 = \text{co} \left( \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \right) \oplus \text{cone} \left( \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \right\} \right).$$

Le calcul de l'ensemble  $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{P}_1$  est obtenu par le calcul qui suit :

$$\mathcal{P}_1 = f(\mathcal{P}_0) = \text{co} \left( \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \right) \oplus \text{cone} \left( \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \right\} \right). \quad (4)$$

En réitérant le processus, on obtient les ensembles atteignables pour différentes valeurs de  $k$  (cf. Figure 2).

## 5 Conclusion

Dans ce papier, nous avons montré que le problème de l'atteignabilité des systèmes (max,+)-linéaires peut être résolu par une approche basée sur les polyèdres tropicaux. Il reste à comparer la complexité de cette approche avec celle utilisant les DBM[1].

## Références

- [1] D. Adzkiya, B. De Schutter, and A. Abate. Computational techniques for reachability analysis of max-plus-linear systems. *Automatica*, 53(3) :293–302, 2015.
- [2] X. Allamigeon, S. Gaubert, and É. Goubault. The tropical double description method. In *Proceedings of the 27th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'2010, March 4-6, Nancy, France)*. Leibniz Center in Informatics, 2010.
- [3] Christel Baier and Joost-Pieter Katoen. *Principles of Model Checking (Representation and Mind Series)*. The MIT Press, 2008.
- [4] Stéphane Gaubert and Ricardo D. Katz. The minkowski theorem for max-plus convex sets. *Linear Algebra and its Applications*, 421(2-3) :356–369, 2007. Special Issue in honor of Miroslav Fiedler.
- [5] Qi Lu, Michael Madsen, Martin Milata, Søren Ravn, Uli Fahrenberg, and Kim G. Larsen. Reachability analysis for timed automata using max-plus algebra. *The Journal of Logic and Algebraic Programming*, 81(3) :298 – 313, 2012.