

Modèles à base d'opérateurs pour les systèmes $(\max,+)$ cycliques

B.Cottenceau^{1,*}, L.Hardouin¹, and J.Trunk^{1,2}

¹ LARIS, Université d'Angers, France

² TU Berlin, Allemagne.

Résumé

Certaines classes de Systèmes à Événements Discrets (SED) peuvent être étudiées via des modèles sur des dioïdes, notamment en décrivant leur dynamique au moyen d'opérateurs. Le décalage temporel et le décalage dans la numérotation des événements sont dans ce cas assimilés à des opérateurs élémentaires. Depuis les années 80, cette approche a permis l'étude des Graphes d'Événements Temporisés (GET) au travers de modèles entrée-sortie. La structure algébrique considérée est alors un ensemble de séries formelles, noté $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$, dont les variables γ et δ sont assimilables aux opérateurs mentionnés ci-avant. Il a été montré que l'on peut étendre cette approche en considérant de nouveaux opérateurs additifs et ainsi contribuer à l'étude de systèmes mettant en jeu des phénomènes comme la duplication d'événements (opérateur μ_m), le regroupement (opérateur β_b), ou encore des synchronisations temporelles spécifiques (opérateur Δ_T). A la différence des GET ordinaires, les systèmes impliquant de tels phénomènes ne sont alors plus stationnaires. Ils conservent néanmoins une propriété de cyclicité, dans le domaine temporel ou événementiel, qui rend leur étude plus complexe, mais possible. Les techniques de calcul pour les systèmes cycliques sont d'ailleurs comparables à celles utilisées pour les séries périodiques de $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$. Ce papier vise à introduire la librairie logicielle ETVO ((Event|Time) Variant Operators) qui a été développée pour les calculs sur les systèmes cycliques. Des rappels de modélisation sont tout d'abord donnés avant de montrer comment traiter quelques exemples simples à l'aide de l'outil ETVO. Cet outil de calcul permet l'analyse de performance et la synthèse de contrôle pour les GET ordinaires, les GET valués et les GET avec des temps de séjour cycliques.

1 Introduction

L'analyse des Systèmes à Événements Discrets (SED) par une description sur des algèbres de type $(\max,+)$ a connu des développements importants dans les années 80. Cette approche a permis d'exhiber différentes classes de modèles linéaires sur des dioïdes. On peut citer les Graphes d'Événements Temporisés (GET) [2] qui forment une sous-classe des réseaux de Petri temporisés, les modèles du Network Calculus pour les réseaux informatiques [11], les graphes de flots de données synchrones [4] ou encore les automates à multiplicités sur l'algèbre $(\max,+)$ [6] [10].

Les outils présentés ici s'inscrivent dans la continuité de [2] où une représentation entrée-sortie des systèmes $(\max,+)$ linéaires est proposée. Les SED y sont décrits au moyen de séries formelles en deux variables commutatives γ et δ , appartenant à un dioïde noté $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$, qui peuvent être interprétées comme des opérateurs réalisant des décalages événementiel/temporel dans les séquences d'événements. Cette approche a donné lieu à différents travaux concernant les outils de calcul [7] [8] et la synthèse de contrôle [9]. De manière générale, un élément de

*Le développement de la librairie ETVO a été soutenu par le RFI Atlanstic 2020

$\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$ est une série formelle qui s'écrit $s = \bigoplus \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$. La particularité des calculs rationnels (somme, produit, étoile de Kleene) est que le résultat peut toujours s'écrire sous une forme canonique ultimement périodique $s = p \oplus q(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$, où p et q sont des polynômes. La librairie MinMaxGD [8] fournit les classes C++ qui réalisent les calculs dans $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$ de séries sous cette forme.

Ces travaux ont été étendus dans [3] et [14] en introduisant quatre opérateurs supplémentaires : un opérateur de multiplication d'événements noté μ_m , un opérateur de regroupement noté β_b , un opérateur de multiplication temporelle noté \mathbb{W}_m , et un opérateur de division temporelle noté \mathbb{A}_d . La classe des systèmes pouvant être modélisés s'en trouve par conséquent élargie. Sur le plan algébrique, ces opérateurs appartiennent à deux dioïdes, notés respectivement $\mathcal{E}[[\delta]]$ et $\mathcal{T}[[\gamma]]$, chacun étant une extension de $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$. Les éléments de $\mathcal{E}[[\delta]]$ sont des séries formelles en variable δ dont les coefficients sont dans un dioïde \mathcal{E} qui regroupe les opérateurs événementiels $\{\gamma^n, \mu_m, \beta_b\}$. De façon duale, les éléments de $\mathcal{T}[[\gamma]]$ sont des séries formelles en variable γ dont les coefficients sont dans un dioïde \mathcal{T} qui regroupe les opérateurs temporels $\{\delta^t, \mathbb{W}_m, \mathbb{A}_d\}$. De manière générale, la dualité entre les deux structures algébriques $\mathcal{E}[[\delta]]/\mathcal{T}[[\gamma]]$ provient du fait que les phénomènes dans le domaine événementiel ont leur pendant dans le domaine temporel. Par exemple, le regroupement événementiel (batch) par lots de taille b revient à s'intéresser à une synchronisation sur les événements dont le numéro d'occurrence est multiple de b . Dans le domaine temporel, le phénomène équivalent est de s'intéresser aux synchronisations n'opérant qu'à certaines dates données, par exemple celles multiples d'une valeur T donnée. Dans ce cadre algébrique, on se concentre plus précisément sur les éléments de $\mathcal{E}[[\delta]]$ et $\mathcal{T}[[\gamma]]$ qui peuvent s'écrire sous une forme ultimement périodique $s = p \oplus q(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$, c'est-à-dire pour lesquels il existe une forme canonique permettant de tester l'égalité. Du point de vue de la modélisation, les séries de $\mathcal{E}[[\delta]]$ permettent la description du comportement dynamique des GET valués consistants, et les séries de $\mathcal{T}[[\gamma]]$ celle des GET avec des temps de séjour variant cycliquement.

Pour tout système (max,+) linéaire stationnaire dont la fonction de transfert est $H_s \in \mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$, alors on a $H_s \gamma^1 = \gamma^1 H_s$ et $H_s \delta^1 = \delta^1 H_s$. Cette propriété indique que le comportement du système reste identique dans le temps (stationnaire), et ceci indépendamment des événements passés. En anglais, on dit d'un tel système qu'il est *time-invariant* et *event-invariant*. Cette propriété ne sera plus conservée pour les systèmes abordés ici. Par exemple, si $H_e \in \mathcal{E}[[\delta]]$ décrit un GET valué consistant, alors la propriété vérifiée, moins forte, s'exprime : $\exists N, N' \geq 1$, tels que $H_e \gamma^N = \gamma^{N'} H_e$ et $H_e \delta^1 = \delta^1 H_e$. Le transfert H_e décrit donc un système stationnaire mais dont le comportement change au fur et à mesure des occurrences d'événements (*event-variant*). S'agissant des GET à temps de séjour cyclique décrits sur $\mathcal{T}[[\gamma]]$, c'est dual : il existe T tel que $H_t \delta^T = \delta^T H_t$ et $H_t \gamma^1 = \gamma^1 H_t$. Le transfert H_t décrit un système non stationnaire (*time-variant*) mais dont le comportement ne varie pas en fonction des événements. Dans les deux cas, les systèmes conservent une cyclicité qui s'exprime soit dans le domaine événementiel (cyclicité (N, N') pour les systèmes sur $\mathcal{E}[[\delta]]$), soit dans le domaine temporel (T -cyclicité pour les systèmes sur $\mathcal{T}[[\gamma]]$).

L'objet de ce papier est de resituer les éléments de modélisation pour les systèmes cycliques sur les dioïdes $\mathcal{E}[[\delta]]$ et $\mathcal{T}[[\gamma]]$ issus de [3], [13], [14] et surtout d'introduire la librairie logicielle ETVO ((Event|Time)-Variant Operators) destinée aux calculs sur les séries ultimement périodiques de $\mathcal{E}[[\delta]]$ et $\mathcal{T}[[\gamma]]$. Cette librairie s'appuie fortement sur la librairie MinMaxGD puisque, d'après [13][14] et [12], les opérations sur les séries ultimement périodiques de $\mathcal{E}[[\delta]]$ et $\mathcal{T}[[\gamma]]$ peuvent se ramener à des opérations matricielles sur $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$.

2 Diodes d'opérateurs

2.1 Signaux et synchronisation

Un SED est un système dynamique évoluant suite à l'occurrence de phénomènes ponctuels appelés *événements*. Un événement reflète l'instant où le système change d'état. Pour un système manufacturier, les événements considérés sont par exemple l'arrivée d'une pièce dans un stock, les instants où les tâches commencent/ se terminent, etc. L'évolution d'un SED est caractérisée par des séquences d'événements se produisant au cours du temps. La Fig.1(a) décrit une

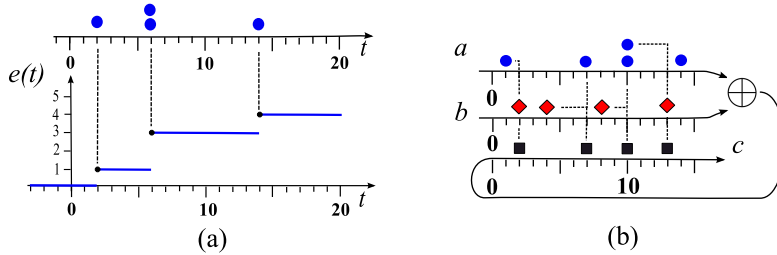


FIGURE 1 – Séquence, compteur et synchronisation d'événements.

séquence d'occurrences de l'événement e . Chaque occurrence est matérialisée par une marque sur l'axe des temps. Par la suite, une telle séquence est notée comme un ensemble de paires $\{(e_k, t_k)\}$, triées par dates croissantes, où e_k désigne l'occurrence numérotée $k \in \mathbb{Z}$ et $t_k \in \mathbb{Z}$ sa date. Les dates sont ici considérées comme discrètes et multiples d'une unité de temps arbitraire. Pour la Fig.1(a), $\{e\} = \{(e_0, 2), (e_1, 6), (e_2, 6), (e_3, 14)\dots\}$. Deux représentations alternatives des séquences d'événements sont communément utilisées. La première est une fonction dite *compteur d'événements*, définie par $e(t) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, t \mapsto [\text{nombre d'occurrences de } e \text{ avant la date } t]$. La figure Fig.1(a) décrit aussi la fonction compteur $e(t)$. En échangeant les axes temps/événements, on obtient une autre représentation appelée *fonction dateur* et définie par $e(k) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, k \mapsto [\text{date de l'occurrence numérotée } k]$. Pour l'exemple Fig.1(a), les premières valeurs¹ de $e(k)$ sont $e(0) = 2, e(1) = 6, e(2) = 6$ et $e(3) = 14$.

Les séquences d'événements et les fonctions compteurs/dateurs s'apparentent à des *signaux* pour les SED, puisqu'elles décrivent l'ensemble des occurrences d'un événement donné. Par la suite, on notera Σ_s l'ensemble des séquences, Σ_c l'ensemble des fonctions compteurs et Σ_d l'ensemble des fonctions dateurs, ou encore Σ quand le type de signal n'importe pas.

Pour les systèmes considérés ici, la synchronisation des signaux est le phénomène dominant. La synchronisation de séquences d'événements, notée \oplus , s'exprime comme suit : $\{a\}, \{b\}, \{c\} \in \Sigma_s$, alors $\{c\} = \{a\} \oplus \{b\}$ signifie que chaque occurrence c_k se produit dès que possible après a_k et b_k , soit $\{(c_k, \tau_k)\} = \{(a_k, t_k)\} \oplus \{(b_k, t'_k)\} = \{(c_k, \max(t_k, t'_k))\}$. Pour la Fig.1(b), on observe $\{(a_0, 1), (a_1, 7), \dots\} \oplus \{(b_0, 2), (b_1, 4), \dots\} = \{(c_0, 2), (c_1, 7), \dots\}$. Quand les événements sont décrits au moyen de fonctions compteurs/dateurs, la synchronisation de signaux s'exprime $a, b \in \Sigma_c$, $(a \oplus b)(t) = \min(a(t), b(t))$, ou encore $a, b \in \Sigma_d$, $(a \oplus b)(k) = \max(a(k), b(k))$. On remarque que la synchronisation est idempotente, $\forall a \in \Sigma, a \oplus a = a$.

1. Par convention, le premier événement est numéroté 0.

2.2 Opérateurs

Un opérateur est défini ici comme une application dont l'image d'un signal est un signal. On peut donc définir des opérateurs sur Σ_s , Σ_c ou Σ_d . Les opérateurs élémentaires considérés par la suite sont au nombre de 6, mais ils peuvent être ensuite combinés, par synchronisation et mise en série, pour décrire des systèmes plus complexes.

L'opérateur noté δ^τ , avec $\tau \in \mathbb{Z}$, applique un décalage de τ unités de temps aux événements, soit $\delta^\tau\{(a_k, t_k)\} = \{(b_k, t_k + \tau)\}$. Pour la Fig.2(a), $\delta^3\{(a_0, 1), (a_1, 5), \dots\} = \{(b_0, 4), (b_1, 8), \dots\}$. Quand on exprime cet opérateur comme une application sur Σ_c/Σ_d on obtient soit $\forall a \in \Sigma_c$, $[\delta^\tau a](t) = a(t - \tau)$, soit $\forall a \in \Sigma_d$, $[\delta^\tau a](k) = a(k) + \tau$. Le décalage événementiel, noté γ^ν avec $\nu \in$

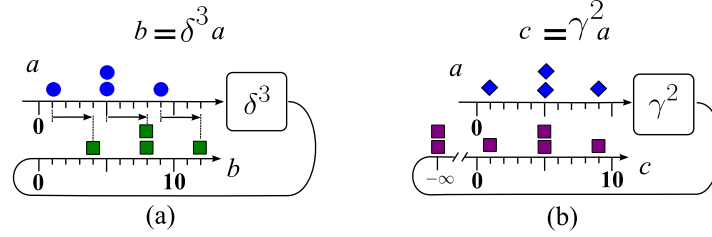


FIGURE 2 – Décalage temporel/événementiel : $b = \delta^3 a$ et $c = \gamma^2 a$

\mathbb{Z} , produit une modification dans la numérotation des événements $\gamma^\nu\{(a_k, t_k)\} = \{(b_{k+\nu}, t_k)\}$ qui conduit à un écart permanent de ν occurrences entre l'entrée et la sortie de l'opérateur. Pour l'exemple Fig.2(b), il y a donc deux occurrences de c à la date $-\infty$ (pour garantir cet écart), puis un nouvel événement c à chaque occurrence de a , soit $\gamma^2\{(a_0, 1), (a_1, 5), \dots\} = \{(c_0, -\infty), (c_1, -\infty), (c_2, 1), (c_3, 5), \dots\}$. Sur Σ_c/Σ_d , l'effet de l'opérateur γ^ν s'exprime soit $\forall a \in \Sigma_c$, $[\gamma^\nu a](t) = a(t) + \nu$, soit $\forall a \in \Sigma_d$, $[\gamma^\nu a](k) = a(k - \nu)$.

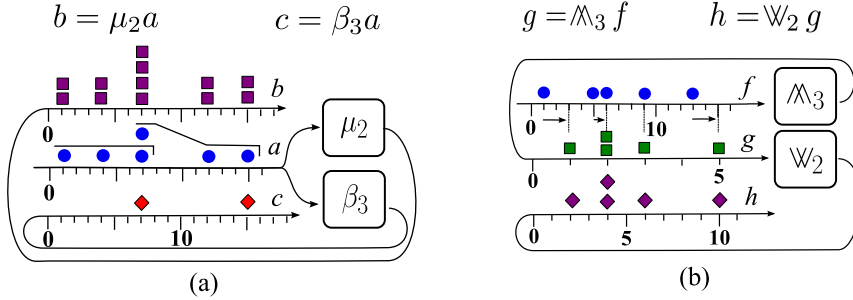


FIGURE 3 – Duplication/regroupement d'événements, multiplication/division temporelle

Dans [3], l'opérateur μ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$ décrit une multiplication d'événements. Chaque occurrence de la séquence d'entrée génère m occurrences dans la séquence de sortie. Pour l'exemple Fig.3(a), on a $\mu_2\{(a_0, 1), (a_1, 4), \dots\} = \{(b_0, 1), (b_1, 1), (b_2, 4), (b_3, 4), \dots\}$. Inversement pour l'opérateur β_b avec $b \in \mathbb{N}^*$, plusieurs occurrences sont nécessaires en entrée pour produire un événement de sortie, ce qui peut être vu comme un regroupement (batch). Par exemple Fig.3(a), on a $\beta_3\{(a_0, 1), (a_1, 4), (a_2, 7), \dots\} = \{(c_0, 7), \dots\}$. L'expression des opérateurs μ_m et β_b sur Σ_c donne : $\forall a \in \Sigma_c$, $[\mu_m a](t) = a(t) \times m$, $[\beta_b a](t) = \lfloor a(t)/b \rfloor$.

Enfin, en raison de la symétrie événements/temps, deux opérateurs produisant des modifications temporelles peuvent être introduits. L'opérateur \mathbb{M}_d avec $d \in \mathbb{N}^*$, décrit une division temporelle : $\forall a \in \Sigma_d, [\mathbb{M}_d a](k) = \lceil a(k)/d \rceil$. Pour l'exemple² de la Fig.3(b), $\mathbb{M}_3\{(f_0, 1), (f_1, 5), (f_2, 6), \dots\} = \{(g_0, 1), (g_1, 2), (g_2, 2), \dots\}$. La multiplication temporelle, quant à elle, est notée \mathbb{W}_m avec $m \in \mathbb{N}^*$, et est définie par $\forall a \in \Sigma_d, [\mathbb{W}_m a](k) = a(k) \times m$. Par la Fig.3(b), on illustre $\mathbb{W}_2\{(g_0, 1), (g_1, 2), \dots\} = \{(h_0, 2), (h_1, 4), \dots\}$.

En matière de modélisation, l'interprétation des opérateurs \mathbb{M}_3 et \mathbb{W}_2 prend son sens si l'on considère que ces opérateurs agissent sur la *valeur de l'unité de temps*. Il faut considérer que les horloges qui datent les événements ne sont pas les mêmes pour l'ensemble des événements du système. Par exemple Fig.3(b), on doit considérer que les horloges qui datent les événements f et g sont telles que trois unités de temps pour dater f correspondent à une unité pour dater g .

Remarque 1 (L'opérateur \mathbb{M}_3 est *time-variant*). Avec cette interprétation, l'opérateur \mathbb{M}_3 apparaît comme un décalage temporel qui varie dans le temps. Par exemple, sur la Fig.3(b) on observe un décalage temporel entre $(f_0, 1)$ et $(g_0, 1)$, puisque les horloges sont différentes pour f et g . En effet, si l'on considère l'horloge de f pour dater les événements, on obtient que g_0 est daté 3, alors que f_0 est daté 1. L'opérateur produit donc un décalage de 2 unités de temps pour un événement d'entrée ayant lieu à une date dans $3\mathbb{Z} + 1$. Alors que l'opérateur \mathbb{M}_3 ne produit aucun décalage temporel si l'événement a lieu à une date dans $3\mathbb{Z}$, par exemple les événements f_2 et g_2 sont simultanés. En résumé, l'opérateur \mathbb{M}_3 induit un décalage temporel qui varie dans le temps, de valeur comprise entre 0 et 2 unités de temps³.

2.3 Dioïde d'opérateurs additifs

Un opérateur $S : \Sigma \rightarrow \Sigma$ est dit additif si $\forall a, b \in \Sigma, S(a \oplus b) = Sa \oplus Sb$. Les 6 opérateurs introduits dans la section précédente satisfont cette propriété.

Notation 1 (Dioïde \mathcal{O}). L'ensemble des opérateurs additifs, muni de la somme et du produit définis ci-dessous, est un dioïde noté $\mathcal{O} : h_1, h_2 \in \mathcal{O}$,

$$\begin{aligned} h_1 \oplus h_2 &\triangleq \forall x \in \Sigma, (h_1 \oplus h_2)(x) = h_1 x \oplus h_2 x, \\ h_1 h_2 &\triangleq \forall x \in \Sigma, (h_1 h_2)(x) = h_1(h_2 x). \end{aligned}$$

L'élément neutre de l'addition est l'opérateur noté ε et l'élément neutre du produit est l'opérateur identité $\forall x \in \Sigma, e(x) = x$. A noter que le dioïde \mathcal{O} n'est pas commutatif, $h_1 h_2 \neq h_2 h_1$.

Proposition 1 ([1] [3] [14]). Sur \mathcal{O} , les opérateurs $\gamma^n, \delta^t, \mu_m, \beta_b, \mathbb{W}_m, \mathbb{M}_d$ satisfont :

$$\begin{aligned} \gamma^1 \delta^1 &= \delta^1 \gamma^1 & \gamma^n \gamma^{n'} &= \gamma^{n+n'} & \delta^t \delta^{t'} &= \delta^{t+t'} & (f1) \\ \gamma^n \oplus \gamma^{n'} &= \gamma^{\min(n, n')} & \delta^t \oplus \delta^{t'} &= \delta^{\max(t, t')} & & & (f2) \\ \mu_m \delta^1 &= \delta^1 \mu_m & \beta_b \delta^1 &= \delta^1 \beta_b & \beta_m \mu_m &= e & (f3) \\ \mathbb{W}_m \gamma^1 &= \gamma^1 \mathbb{W}_m & \mathbb{M}_d \gamma^1 &= \gamma^1 \mathbb{M}_d & \mathbb{M}_m \mathbb{W}_m &= e & (f4) \\ \mu_m \mu_{m'} &= \mu_{m \times m'} & \beta_b \beta_{b'} &= \beta_{b \times b'} & & & (f5) \\ \mathbb{W}_m \mathbb{W}_{m'} &= \mathbb{W}_{m \times m'} & \mathbb{M}_d \mathbb{M}_{d'} &= \mathbb{M}_{d \times d'} & & & (f6) \\ \mu_m \gamma^1 &= \gamma^m \mu_m & \gamma^1 \beta_b &= \beta_b \gamma^b & & & (f7) \\ \mathbb{W}_m \delta^1 &= \delta^m \mathbb{W}_m & \delta^1 \mathbb{M}_d &= \mathbb{M}_d \delta^d & & & (f8) \end{aligned}$$

L'opérateur identité s'écrit donc indifféremment $e = \gamma^0 = \delta^0 = \mu_1 = \beta_1 = \mathbb{W}_1 = \mathbb{M}_1$.

2. Il faut remarquer que les graduations des axes de temps ne sont pas les mêmes pour f , g et h . La date 3 pour f correspond à la date 1 pour g , et à la date 2 pour h .

3. Selon les unités de temps utilisées pour dater les événements d'entrée

A des fins de calcul formel, les identités listées ci-dessus fournissent différents moyens de réécrire ou de simplifier des expressions impliquant ces opérateurs. Le cas des systèmes (max,+) linéaires stationnaires correspond au cas où seuls interviennent les opérateurs γ^n et δ^t , et donc seulement les égalités (f1) (f2).

Notation 2 (Dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ [2]). $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta] \subset \mathcal{O}$ est le dioïde constitué des sommes et produits d'opérateurs dans $\{\varepsilon, e, \gamma^1, \delta^1\}$. Puisque les opérateurs γ^n et δ^t commutent (f1), tous les éléments s'écrivent $\bigoplus_i \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$. En outre, (f2) fournit une règle de simplification permettant d'écrire les éléments sous une forme canonique où les valeurs n_i, t_i satisfont : $\forall i, n_i > n_{i-1}, t_i > t_{i-1}$.

Exemple 1 (simplification dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$). Soit $s = \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^1 \delta^2 \gamma^1 \oplus \delta^4 \gamma^3 \oplus \gamma^4 \delta^3 \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$. En utilisant (f1), $s = \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^3$, qui n'est pas sous forme canonique. On peut simplifier comme suit : d'après (f2), $\gamma^3 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^3 = \gamma^3 \delta^{\max(4,3)} \oplus \gamma^4 \delta^3 = \gamma^3 (\delta^4 \oplus \delta^3) \oplus \gamma^4 \delta^3$. Puis, en associant les termes différemment, $\gamma^3 \delta^4 \oplus (\gamma^3 \oplus \gamma^4) \delta^3 = \gamma^3 \delta^4 \oplus \gamma^{\min(3,4)} \delta^3 = \gamma^3 \delta^4 \oplus \gamma^3 \delta^3 = \gamma^3 (\delta^4 \oplus \delta^3) = \gamma^3 \delta^{\max(4,3)}$. Finalement, la forme canonique obtenue est $s = \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^4$ (le terme $\gamma^4 \delta^3$ peut être enlevé).

Le théorème suivant, qui est central pour les systèmes (max,+), relie les expressions rationnelles de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ aux expressions ultimement périodiques. On rappelle que l'étoile de Kleene d'un élément se définit $a^* = e \oplus a \oplus a^2 \dots = \bigoplus_{i \geq 0} a^i$.

Théorème 1 ([1]). Tout élément rationnel de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$, c-à-d obtenu par un nombre fini de sommes, produits et étoiles de Kleene d'éléments dans $\{\varepsilon, e, \gamma^1, \delta^1\}$, peut s'écrire sous une forme ultimement périodique $s = p \oplus q(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$, où p et q sont des polynômes.

Stéphane Gaubert [7][5] a en outre montré que parmi les formes périodiques il y en a une, dite canonique, où ν, τ et le nombres de termes de p et q sont minimaux.

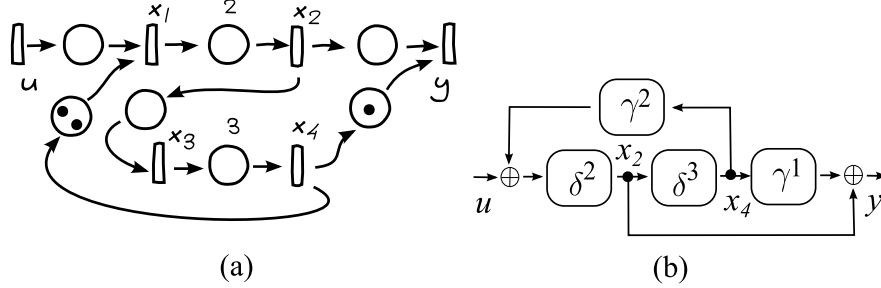


FIGURE 4 – Schéma bloc associé à un GET

Exemple 2. La figure Fig.4(a) décrit un GET^4 , à places temporisées, dont la structure impose des synchronisations et des décalages événementiels/temporels entre les tirs des transitions. Ceci peut s'exprimer sous forme de schéma-bloc Fig.4(b) impliquant les opérateurs γ^n et δ^t , les signaux étant associés aux transitions du GET. La relation entre le signal u (l'entrée) et le signal y (la sortie), c'est-à-dire la fonction de transfert du GET, est fournie par l'expression rationnelle suivante : $y = Hu$ avec $H = \delta^2(\gamma^2 \delta^3 \delta^2)^* \oplus \gamma^1 \delta^3 \delta^2 (\gamma^2 \delta^3 \delta^2)^*$. La librairie *MinMaxGD*

4. Faute de place pour rappeler la définition d'un GET, le lecteur non familier des réseaux de Petri pourra consulter [1] ou accepter l'équivalence entre les deux modèles de la Fig.4.

[8] peut fournir la forme ultimement périodique canonique de cette expression. On obtient ici $H = (\delta^2 \oplus \gamma^1 \delta^5)(\gamma^2 \delta^5)^*$, soit $p = \varepsilon$, $q = \delta^2 \oplus \gamma^1 \delta^5$, $\nu = 2$ et $\tau = 5$.

Remarque 2. C'est grâce à la forme ultimement périodique canonique que l'on peut comparer les expressions rationnelles de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$. Par exemple, les expressions $(\gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^1)(\gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^3)^*$ et $(\gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^2 \delta^2)(\gamma^3 \delta^3)^*$ sont équivalentes, elles se réécrivent l'une et l'autre $(\gamma^1 \delta^1)^*$. Cette forme canonique n'est toutefois pas nécessairement concise. Par exemple, la forme canonique de $(\gamma^{41} \delta^{73} \oplus \gamma^{92} \delta^{163})^*$ contient plus de 200 termes pour le polynôme p .

3 Dioïde $\mathcal{E}[\delta]$

Pour les SED impliquant les opérateurs μ_m et β_b , l'objectif est également de pouvoir automatiser les calculs sur les expressions rationnelles. Il est montré dans [3] que pour les expressions rationnelles associées aux GET valués consistants, il existe une forme ultimement périodique équivalente. Pour illustrer ceci, considérons le GET valué de la Fig.5(a) qui peut être représenté par un schéma-bloc Fig.5(b) impliquant les opérateurs γ^n , δ^t , μ_m et β_b . Outre les phénomènes de synchronisation et de décalage temporel/événementiel déjà décrits par les GET ordinaires, les poids sur les arcs d'un GET valué impliquent des multiplications et des regroupements d'événements. De la même manière que dans l'exemple 2, la fonction de transfert $y = Gu$ s'ex-

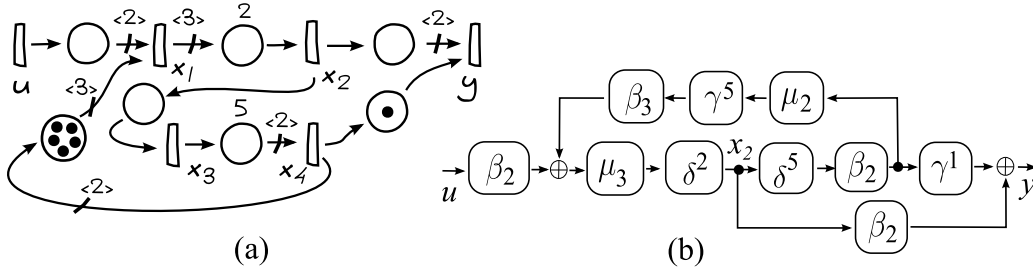


FIGURE 5 – Schéma-bloc associé à un GET valué consistant

prime par une expression rationnelle qui est ici $G = (\beta_2 \oplus \gamma^1 \beta_2 \delta^5) \delta^2 \mu_3 (\beta_3 \gamma^5 \mu_2 \beta_2 \delta^5 \delta^2 \mu_3)^* \beta_2$. La librairie ETVO permet d'obtenir une forme ultimement périodique de cette expression, on obtient ici $G = ((\mu_3 \beta_4 \gamma^2 \oplus \gamma^1 \mu_3 \beta_4) \delta^2 \oplus (\gamma^1 \mu_3 \beta_4 \gamma^2 \oplus \gamma^2 \mu_3 \beta_4) \delta^7) (\gamma^2 \delta^7)^*$. L'objectif de cette section est de rappeler les résultats qui permettent d'automatiser cette réécriture dans un objectif de calcul formel.

Ce qui distingue la manipulation des expressions rationnelles de $\{\varepsilon, \gamma^n, \delta^t, \mu_m, \beta_b\}$ de celles de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$, c'est l'absence de commutativité du produit d'opérateurs. Plus exactement, l'opérateur temporel δ^t peut commuter (f1)(f3) avec tout opérateur événementiel (ou E-opérateur) dans $\{\gamma^n, \mu_m, \beta_b\}$, mais les E-opérateurs ne commutent pas entre eux. Par exemple, $\gamma^1 \mu_2 \beta_3 \neq \mu_2 \beta_3 \gamma^1 \neq \beta_3 \gamma^1 \mu_2$. Cette commutativité partielle suffit néanmoins à exprimer n'importe quel produit d'opérateurs dans $\{\varepsilon, \gamma^n, \delta^t, \mu_m, \beta_b\}$ sous une forme $w \delta^t$, où un E-opérateur w est en facteur de l'opérateur temporel δ^t , ce qui conduit au dioïde $\mathcal{E}[\delta]$.

3.1 Dioïde \mathcal{E}

Le cas des opérateurs événementiels requiert tout d'abord une attention particulière. On note $\mathcal{E} \subset \mathcal{O}$ le dioïde des opérateurs obtenus par un nombre fini de sommes et produits dans

$\{\varepsilon, \gamma^n, \mu_m, \beta_b\}$. Ces opérateurs, dits E-opérateurs, agissent seulement sur la numérotation des événements. Le gain d'un E-opérateur de $w \in \mathcal{E}$, noté $\Gamma(w) \in \mathbb{Q}$, est défini récursivement par : $w_1, w_2 \in \mathcal{E}$, $\Gamma(w_1 w_2) = \Gamma(w_1) \times \Gamma(w_2)$, $\Gamma(w_1 \oplus w_2) = \min(\Gamma(w_1), \Gamma(w_2))$, avec $\Gamma(\gamma^n) = 1$, $\Gamma(\mu_m) = m$ et $\Gamma(\beta_b) = 1/b$. Par exemple, $\Gamma(\beta_3 \gamma^2 \mu_4) = 4/3$. Ce gain indique le ratio entre le nombre d'événements en sortie et le nombre d'événements en entrée de l'opérateur.

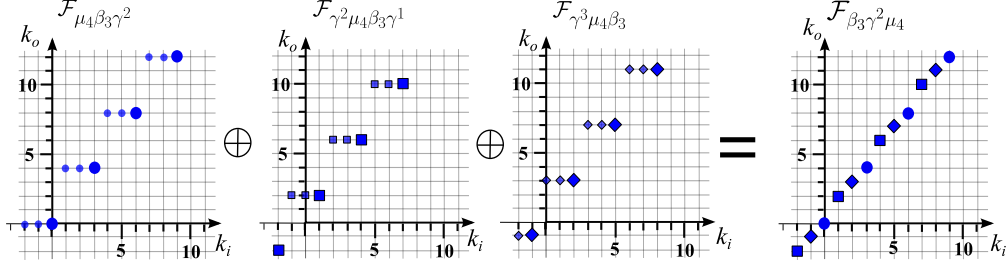


FIGURE 6 – Fonction C/C de $\beta_3 \gamma^2 \mu_4$ et sa décomposition en minimum de fonctions en escalier.

Notation 3 (Fonction C/C). On note $\mathcal{F}_w : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ la fonction Compteur/Compteur (C/C) associée à l'opérateur $w \in \mathcal{E}$ définie par : $w_1, w_2 \in \mathcal{E}$, $\mathcal{F}_{w_1 w_2} = \mathcal{F}_{w_1} \circ \mathcal{F}_{w_2}$, $\mathcal{F}_{w_1 \oplus w_2} = \min(\mathcal{F}_{w_1}, \mathcal{F}_{w_2})$, avec $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_{\gamma^n}(k) = k + n$, $\mathcal{F}_{\mu_m}(k) = m \times k$, et $\mathcal{F}_{\beta_b}(k) = \lfloor k/b \rfloor$.

La fonction \mathcal{F}_w donne une représentation graphique, dans le plan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, de l'effet d'un E-opérateur w sur la numérotation des événements. Un événement de numéro k_i est transformé en événement de numéro $k_o = \mathcal{F}_w(k_i)$ par l'opérateur w . Cette fonction crée aussi un isomorphisme entre l'ensemble \mathcal{E} des E-opérateurs et l'ensemble des fonctions sur \mathbb{Z} muni du min et de la composition. La fonction $\mathcal{F}_{\beta_3 \gamma^2 \mu_4}(k) = \lfloor (4k + 2)/3 \rfloor$ est décrite Fig.6.

Définition 1 (Opérateur équilibré). Un E-opérateur $w \in \mathcal{E}$ est dit équilibré s'il est composé de sommes d'opérateurs de gain identique : l'opérateur $w_1 = \gamma^1 \mu_3 \beta_2 \oplus \beta_4 \gamma^7 \mu_6$ est équilibré, mais $w_2 = \gamma^1 \oplus \mu_2$ ne l'est pas.

Proposition 2 ([3]). Tout E-opérateur équilibré $w \in \mathcal{E}$ est décrit par une fonction C/C qui est (n, n') -périodique, c'est-à-dire telle que $\exists n, n', \forall k \in \mathbb{Z}, \mathcal{F}_w(k + n) = n' + \mathcal{F}_w(k)$.

Proposition 3 ([3]). Tout E-opérateur équilibré $w \in \mathcal{E}$ a une écriture unique $w = \bigoplus_{i=1}^K \gamma^{n_i} \mu_m \beta_b \gamma^{n'_i}$, où $\forall i, n'_i < b$.

Exemple 3. A titre d'exemple, on a $\beta_3 \gamma^2 \mu_4 = \mu_4 \beta_3 \gamma^2 \oplus \gamma^2 \mu_4 \beta_3 \gamma^1 \oplus \gamma^3 \mu_4 \beta_3$. La Fig.6 illustre cette décomposition. D'un point de vue pratique, la fonction C/C associée à $\gamma^{n_i} \mu_m \beta_b \gamma^{n'_i}$ est une fonction en escalier (b, m) -périodique (voir Fig.6). Toute fonction (b, m) -périodique peut s'écrire comme le minimum d'un nombre fini de fonctions en escaliers ayant la même périodicité.

La librairie ETVO fournit des classes C++ pour manipuler les E-opérateurs équilibrés de \mathcal{E} . Les opérations de somme/produit sur \mathcal{E} sont réalisées par des opérations min/compositions de fonctions C/C. La classe `etvo::Fminp` gère les fonctions (n, n') -périodiques et la classe `etvo::E_op` décrit les opérateurs équilibrés de \mathcal{E} . Un E-opérateur peut également être décomposé selon la Prop.3, on obtient alors une collection d'objets décrivant les termes $\gamma^{n_i} \mu_m \beta_b \gamma^{n'_i}$. On donne ci-dessous un court exemple C++ illustrant la décomposition de $\beta_3 \gamma^2 \mu_4$ (cf. Fig.6). La sortie `Fw=[0 2 3] (3, 4)` indique que la fonction est $(3, 4)$ périodique et que `Fw(0)=0`, `Fw(1)=2` et `Fw(2)=3`.


```

#include "etvo.h"
using namespace etvo;
int main() {
    E_op w = E_op::Beta(3)*E_op::Gamma(2)*E_op::Mu(4);
    std::cout << "w=" << w << "\n"; // w=m4.b3.g2+g2.m4.b3.g1+g3.m4.b3
    Fminp Fw = w.getFw(); // fonction C/C de l'opérateur
    std::cout << "Fw=" << Fw << "\n"; // Fw=[0 2 3](3,4)
    std::vector<gNg> termes = w.getTerms(); // décomposition de w
    for(gNg t:termes) std::cout << t << ", "; // m4.b3.g2,g2.m4.b3.g1,g3.m4.b3,
}

```

3.2 Séries de $\mathcal{E}[[\delta]]$

Notation 4 (Dioïde $\mathcal{E}[[\delta]]$). *Le dioïde $\mathcal{E}[[\delta]] \subset \mathcal{O}$ est l'ensemble des séries formelles en variable δ , à exposants dans \mathbb{Z} et à coefficients dans \mathcal{E} . Une série $s \in \mathcal{E}[[\delta]]$ s'écrit $s = \bigoplus_i w_i \delta^{t_i}$ avec $w_i \in \mathcal{E}, t_i \in \mathbb{Z}$. La somme et le produit de $\mathcal{E}[[\delta]]$ s'expriment : $s_1 = \bigoplus_i w_{1i} \delta^{t_i}, s_2 = \bigoplus_i w_{2i} \delta^{t_i}$,*

$$\begin{aligned} s_1 \oplus s_2 &\triangleq \bigoplus_i (w_{1i} \oplus w_{2i}) \delta^{t_i}, \\ s_1 s_2 &\triangleq \bigoplus_{k=i+j} (w_{1i} w_{2j}) \delta^{t_k}. \end{aligned}$$

Définition 2 (Série équilibrée de $\mathcal{E}[[\delta]]$). *Une série $s = \bigoplus_i w_i \delta^{t_i} \in \mathcal{E}[[\delta]]$ est dite équilibrée si tous les coefficients w_i sont équilibrés et ont le même gain. On note alors par $\Gamma(s) = \Gamma(w_i)$ le gain de la série. La série $a = \mu_2 \delta^1 \oplus \gamma^4 \mu_4 \beta_2 \delta^5 \in \mathcal{E}[[\delta]]$ est équilibrée et de gain $\Gamma(a) = 2$, alors que $\gamma^2 \delta^1 \oplus \beta_2 \delta^5$ ne l'est pas puisque $(\Gamma(\gamma^2 \delta^1) = 1) \neq (\Gamma(\beta_2 \delta^5) = 1/2)$.*

Définition 3 (Série ultimement périodique de $\mathcal{E}[[\delta]]$). *Une série $s = \bigoplus_i w_i \delta^{t_i} \in \mathcal{E}[[\delta]]$ est ultimement périodique si elle peut s'écrire $s = p \oplus q(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$ avec p et q des polynômes⁵ et $\nu, \tau \geq 0$.*

Remarque 3 (Deux formes périodiques). *En raison de la non commutativité du produit, il y a deux écritures ultimement périodiques d'une même série. Le terme $(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$ est soit à droite, soit à gauche : soit $s = p \oplus q(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$ (terme étoilé à droite), soit $s = p' \oplus (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* q'$ (terme étoilé à gauche). Les deux écritures satisfont $(\nu'/\tau')/(\nu/\tau) = \Gamma(s)$.*

Proposition 4 ([3]). *Soient $s_1, s_2 \in \mathcal{E}[[\delta]]$ des séries équilibrées et ultimement périodiques.*

- si $s_1 \oplus s_2$ est équilibré, alors $s_1 \oplus s_2$ est ultimement périodique,
- le produit $s_1 s_2$ est ultimement périodique avec $\Gamma(s_1 s_2) = \Gamma(s_1) \times \Gamma(s_2)$,
- si $\Gamma(s_1) = 1$, alors s_1^* est ultimement périodique.

Preuve: Les preuves complètes de ce résultat sont détaillées dans [3]. Pour la somme, la technique de preuve est adaptée de celle utilisée dans [7] pour les séries de $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$. Pour le produit, en utilisant les deux écritures périodiques (cf. Rem.3), on a $s_1 s_2 = (p_1 \oplus q_1 (\gamma^{\nu_1} \delta^{\tau_1})^*) ((\gamma^{\nu_2} \delta^{\tau_2})^* q_2' \oplus p_2') = p_1 (\gamma^{\nu_2} \delta^{\tau_2})^* q_2' \oplus p_1 p_2' \oplus q_1 (\gamma^{\nu_1} \delta^{\tau_1})^* (\gamma^{\nu_2} \delta^{\tau_2})^* q_2' \oplus q_1 (\gamma^{\nu_1} \delta^{\tau_1})^* p_2'$. Puisque $(\gamma^{\nu_1} \delta^{\tau_1})^* (\gamma^{\nu_2} \delta^{\tau_2})^*$ est d'après le Th.1 une série ultimement périodique de $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$, le produit de séries apparaît comme la somme de 3 séries ultimement périodiques et d'un polynôme. Enfin, pour l'étoile de Kleene, la Prop.7 donnera la preuve. \square

Ce résultat étend le Th.1. Il montre que pour certaines expressions rationnelles de $\mathcal{E}[[\delta]]$, celles impliquant des séries équilibrées et dont les étoiles s'appliquent sur des termes de gain valant 1, il existe une expression ultimement périodique équivalente. Comme dans la librairie MinMaxGD, la librairie ETVO utilise cette forme ultimement périodique pour représenter les

5. des sommes finies $p = \bigoplus_{i=1}^P w_i \delta^{t_i}$ et $q = \bigoplus_{j=1}^Q w_j' \delta^{t_j}$

séries de $\mathcal{E}[\delta]$. Plus précisément (cf. Rem.3), chaque série ultimement périodique de $\mathcal{E}[\delta]$ peut être mise sous une forme canonique où le nombre de termes de p et de q est minimal, avec le terme étoilé soit à droite, soit à gauche.

Remarque 4 ((b, m)-cyclicité). *D'après la Prop.3, les séries équilibrées de $\mathcal{E}[\delta]$ peuvent s'écrire $s = \bigoplus_i \gamma^{n_i} \mu_m \beta_b \gamma^{n'_i} \delta^{t_i}$, c'est-à-dire sous une forme où tous les termes partagent le même facteur central $\mu_m \beta_b$. D'après (f7), pour chaque terme $\gamma^{n_i} \mu_m \beta_b \gamma^{n'_i} \delta^{t_i}$, on a $(\gamma^{n_i} \mu_m \beta_b \gamma^{n'_i} \delta^{t_i}) \gamma^b = \gamma^{n_i} \mu_m (\gamma^1) \beta_b \gamma^{n'_i} \delta^{t_i} = \gamma^m (\gamma^{n_i} \mu_m \beta_b \gamma^{n'_i} \delta^{t_i})$. Pour l'ensemble de la série, on a donc $s \gamma^b = \gamma^m s$. Cette propriété est qualifiée de (b, m)-cyclicité. Elle décrit le fait que si l'on connaît la réponse du système s à une entrée u , on peut en déduire sa réponse pour l'entrée décalée $\gamma^b u$, puisque $s(\gamma^b u) = \gamma^m(su)$.*

3.3 Décomposition $\mathbf{m}_m Q \mathbf{b}_b$ des séries de $\mathcal{E}[\delta]$

Puisque les séries équilibrées de $\mathcal{E}[\delta]$ peuvent s'écrire $s = \bigoplus_i \gamma^{n_i} \mu_m \beta_b \gamma^{n'_i} \delta^{t_i}$, alors, d'après (f7), on peut également réécrire chaque terme $\gamma^{n_i} \mu_m \beta_b \gamma^{n'_i} \delta^{t_i} = \gamma^{\nu_i} \mu_m (\gamma^{N_i} \delta^{t_i}) \beta_b \gamma^{\nu'_i}$ avec $0 \leq \nu_i < m, 0 \leq \nu'_i < b$. Par exemple, $\gamma^3 \mu_2 \beta_3 \gamma^5 \delta^7 = \gamma^1 \mu_2 (\gamma^1 \delta^7) \beta_3 \gamma^5 = \gamma^1 \mu_2 (\gamma^1 \delta^7 \gamma^1) \beta_3 \gamma^2 = \gamma^1 \mu_2 (\gamma^2 \delta^7) \beta_3 \gamma^2$.

Appliquée à l'ensemble de la série, cette réécriture donne $s = \bigoplus_i \gamma^{n_i} \mu_m (\gamma^{N_i} \delta^{t_i}) \beta_b \gamma^{n'_i}$ avec $\forall i, 0 \leq n_i < m, 0 \leq n'_i < b$. Il y a alors au plus m facteurs $\gamma^{n_i} \mu_m$ différents, et au plus b facteurs $\beta_b \gamma^{n'_i}$ différents, de part et d'autre des termes $\gamma^{N_i} \delta^{t_i}$. Ceci conduit à la décomposition proposée dans [13]. On définit les deux vecteurs suivants, qui contiennent tous les facteurs évoqués précédemment :

$$\mathbf{m}_m = [\mu_m, \gamma^1 \mu_m, \dots, \gamma^{(m-1)} \mu_m] \text{ et } \mathbf{b}_b = [\beta_b \gamma^{b-1}, \dots, \beta_b \gamma^1, \beta_b]'. \quad (1)$$

Proposition 5 ([13]). *Les vecteurs \mathbf{m}_α et \mathbf{b}_α satisfont $\mathbf{m}_\alpha \mathbf{b}_\alpha = e$, et par conséquent $\mathbf{b}_\alpha \mathbf{m}_\alpha \mathbf{b}_\alpha \mathbf{m}_\alpha = \mathbf{b}_\alpha \mathbf{m}_\alpha$.*

Proposition 6 ([13]). *Pour toute série équilibrée $s = \bigoplus_i \gamma^{n_i} \mu_m \beta_b \gamma^{n'_i} \delta^{t_i} \in \mathcal{E}[\delta]$, il existe une plus grande matrice $\hat{Q} \in \mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]^{m \times b}$ telle que $s = \mathbf{m}_m \hat{Q} \mathbf{b}_b$. La matrice \hat{Q} vérifie en outre $\hat{Q} \mathbf{b}_b \mathbf{m}_m = \mathbf{b}_m \mathbf{m}_m \hat{Q} = \hat{Q}$.*

Cette proposition indique que l'on peut décrire les séries équilibrées ultimement périodiques de $\mathcal{E}[\delta]$ sous une forme unique où le terme central est une matrice de $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$ contenant des séries ultimement périodiques.

Proposition 7 ([13]). *Soit $s \in \mathcal{E}[\delta]$ une série équilibrée et ultimement périodique telle que $\Gamma(s) = 1$ que l'on écrit $s = \mathbf{m}_\alpha \hat{Q} \mathbf{b}_\alpha$. Alors, l'étoile de Kleene s'obtient $s^* = \mathbf{m}_\alpha (\hat{Q})^* \mathbf{b}_\alpha$.*

Preuve: Notons que dans le cas où $\Gamma(s) = 1$, alors \hat{Q} est une matrice carrée de taille $\alpha \times \alpha$. On a $s^* = e \oplus \mathbf{m}_\alpha \hat{Q} \mathbf{b}_\alpha \oplus \mathbf{m}_\alpha \hat{Q} \mathbf{b}_\alpha \mathbf{m}_\alpha \hat{Q} \mathbf{b}_\alpha \oplus \dots$. D'après la Prop.6, $\mathbf{m}_\alpha \hat{Q} \mathbf{b}_\alpha \mathbf{m}_\alpha \hat{Q} \mathbf{b}_\alpha = \mathbf{m}_\alpha \hat{Q}^2 \mathbf{b}_\alpha$. Donc $s^* = \bigoplus_{i \geq 0} \mathbf{m}_\alpha \hat{Q}^i \mathbf{b}_\alpha = \mathbf{m}_\alpha (\hat{Q})^* \mathbf{b}_\alpha$. Ce résultat termine la preuve de la Prop.4 et fournit un algorithme de calcul de l'étoile de Kleene de séries de $\mathcal{E}[\delta]$ qui s'appuie sur l'algorithme de l'étoile de Kleene de $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$ et la somme de séries de $\mathcal{E}[\delta]$. \square

L'intérêt de la décomposition $\mathbf{m}_m Q \mathbf{b}_b$ est d'afficher un élément central Q qui est une matrice de $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$. Cette décomposition relie donc les calculs sur $\mathcal{E}[\delta]$ aux calculs sur $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$. Dans un objectif de calcul formel, tous ces résultats ont permis d'établir différents algorithmes pour les calculs sur des séries périodiques équilibrées de $\mathcal{E}[\delta]$. Ces algorithmes permettent la réécriture de certaines expressions rationnelles sous une forme ultimement périodique, celles respectant les conditions imposées par la Prop.4.

Dans la librairie ETVO, la classe `etvo::Ed` décrit les monômes de $\mathcal{E}[\delta]$, c'est-à-dire les termes $w\delta^t$ où w est un E-opérateur. La classe `etvo::polyEd` décrit les polynômes équilibrés de $\mathcal{E}[\delta]$, et la classe `etvo::seriesEd` décrit les séries équilibrées ultimement périodiques. Ces séries sont mises sous une forme canonique ayant la plus petite périodicité, avec le terme étoilé $(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$ à droite ou à gauche.

On donne ci-dessous le programme de calcul de transfert de l'exemple de la Fig.5 pris en exemple au début de cette section. Les opérateurs élémentaires de $\mathcal{E}[\delta]$ sont obtenus via les fonctions `eg(n)` (γ^n), `ed(t)` (δ^t), `em(m)` (μ_m) et `eb(b)` (β_b). Pour rappel, l'expression rationnelle est $G = s_a(s_b)^*\beta_2$, avec $s_a = (\beta_2 \oplus \gamma^1\beta_2\delta^5)\delta^2\mu_3$, et $s_b = \beta_3\gamma^5\mu_2\beta_2\delta^5\delta^2\mu_3$. L'exécution du programme fournit les deux formes périodiques (étoile à gauche ou à droite), la forme avec le terme étoilé à droite est $G = ((\mu_3\beta_4\gamma^2 \oplus \gamma^1\mu_3\beta_4)\delta^2 \oplus (\gamma^1\mu_3\beta_4\gamma^2 \oplus \gamma^2\mu_3\beta_4)\delta^7)(\gamma^2\delta^7)^*$.

```
...
int main() {
  seriesEd sa = (eb(2) + eg(1)*eb(2)*ed(5))*ed(2)*em(3);
  seriesEd sb = eb(3)*eg(5)*em(2)*eb(2)*ed(7)*em(3);
  seriesEd sG = sa * sb.star()*eb(2);
  sG.toRight(); // forme avec l'étoile à droite
  std::cout << "sG=" << sG << "\n";
  // sG=((m3.b4.g2+g1.m3.b4).d2+(g1.m3.b4.g2+g2.m3.b4).d7).[g2.d7]*
  sG.toLeft(); // étoile à gauche
  std::cout << "sG=" << sG << "\n";
  //sG=[g3.d14]*.(m3.b4.g2+g1.m3.b4).d2+(g1.m3.b4.g2+g2.m3.b4).d7
  //      +(g1.m3.b4.g2+g3.m3.b4).d9+(g2.m3.b4.g2+g4.m3.b4).d14
  polyEd q = sG.getQ(); // polynôme q
  std::cout << "q[0]=" << q[0] << "\n"; //q[0]=(m3.b4.g2+g1.m3.b4).d2 [1er monôme de q]
  matrix<series> Q = sG.getCoreMax(); // décomposition mQb = matrice 3x4
  std::cout << "Q(1,2)=" << Q(1,2) << "\n"; //Q(1,2)=(g0.d2).[g1.d14]*
}
```

4 Dioïde $\mathcal{T}[\gamma]$

La section précédente traite des systèmes mettant en jeu les opérateurs $\{\gamma^n, \delta^t, \mu_m, \beta_b\}$. Par dualité, on s'intéresse désormais aux systèmes impliquant seulement les opérateurs $\{\gamma^n, \delta^t, \mathbb{W}_m, \mathbb{A}_d\}$. Comparé aux GET ordinaires, on introduit ainsi de nouvelles formes de synchronisations temporelles. Dans [14], on considère seulement l'opérateur $\Delta_T = \mathbb{W}_T \mathbb{A}_T$, qui se définit par : $\forall a \in \Sigma_d, [\Delta_T a](k) = \lceil a(k)/T \rceil \times T$. Cet opérateur conserve la même unité de temps (même horloge) pour l'ensemble des signaux du système. Il introduit cependant un effet non stationnaire traduit par une synchronisation temporelle sur les dates multiples de T . Par exemple, considérons $\{b\} = \Delta_3\{a\}$. Avec $\{a\} = \{(a_0, 1), (a_1, 4), (a_2, 6)\}$, on obtient $\{b\} = \{(b_0, 3), (b_1, 6), (b_2, 6)\}$. On voit que les occurrences de b (les sorties) ne peuvent se produire qu'aux dates multiples de 3. Les sorties correspondent aux entrées décalées à la prochaine date dans $3\mathbb{Z}$. L'opérateur Δ_3 peut s'interpréter comme un décalage temporel qui varie dans le temps (cf. Remarque 1). Ce type d'opérateur est adapté à la description des feux de circulation où lorsque le feu est rouge, on retarde les événements jusqu'à la date suivante où le feu devient vert.

En raison de la dualité événements/temps, la construction des séries de $\mathcal{E}[\delta]$, ainsi que les techniques de réécriture, développées dans la section précédente se transposent aux séries impliquant l'opérateur γ^n et les opérateurs temporels $\{\delta^t, \Delta_T\}$. On note $\mathcal{T} \subset \mathcal{O}$ le dioïde des opérateurs obtenus par un nombre fini de sommes et produits dans $\{\varepsilon, \delta^t, \Delta_T\}$. Ces opérateurs, dits T-opérateurs, agissent seulement sur les dates des événements. Ils opèrent des décalages temporels fixes ou variant dans le temps.

Notation 5 (Dioïde $\mathcal{T}[\gamma]$). *Le dioïde $\mathcal{T}[\gamma] \subset \mathcal{O}$ est l'ensemble des séries formelles en variable γ , à exposants dans \mathbb{Z} et à coefficients dans \mathcal{T} . Une série $s \in \mathcal{T}[\gamma]$ s'écrit $s = \bigoplus_i v_i \gamma^{n_i}$ avec $v_i \in \mathcal{T}, n_i \in \mathbb{Z}$.*

Notation 6 (Fonction D/D). *On note $\mathcal{R}_v : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ la fonction Dateur/Dateur (D/D) associée à l'opérateur $v \in \mathcal{T}$ définie par : $v_1, v_2 \in \mathcal{T}, \mathcal{R}_{v_1 v_2} = \mathcal{R}_{v_1} \circ \mathcal{R}_{v_2}, \mathcal{R}_{v_1 \oplus v_2} = \max(\mathcal{R}_{v_1}, \mathcal{R}_{v_2})$, avec $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathcal{R}_{\delta^\tau}(t) = t + \tau, \mathcal{R}_{\Delta_T}(t) = T \times \lceil t/T \rceil$.*

Les T-opérateurs sont isomorphes aux fonctions D/D. Les sommes et produits sur \mathcal{T} sont donc caractérisés par des max et des compositions de fonctions D/D qui sont T -périodiques, c'est-à-dire telles que $\mathcal{R}_v(t+T) = T + \mathcal{R}_v(t)$. Pour un T-opérateur v , un événement d'entrée se produisant à la date t conduit à un événement de sortie à la date $\mathcal{R}_v(t)$. La différence $\mathcal{R}_v(t) - t$ fournit donc le décalage temporel entrée-sortie exprimé à la date t . Comme \mathcal{R}_v est T -périodique, $\mathcal{R}_v(t) - t$ est périodique également. Par conséquent, on peut interpréter un T-opérateur comme un décalage temporel dont la valeur change périodiquement avec le temps.

Notation 7 ($\delta^{(s)}$). *Soit $\langle s \rangle$ une séquence T -périodique $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, avec $s(t+T) = s(t)$. On note $\delta^{(s)}$ l'opérateur $v \in \mathcal{T}[\gamma]$ tel que $\forall t, \mathcal{R}_v(t) - t = s(t)$. Par exemple, $\langle 3, 2, 4, 4 \rangle$ désigne⁶ la séquence $s(0) = 3, s(1) = 2, s(2) = 4, s(3) = 4, \forall t, s(t+4) = s(t)$ et donc $\delta^{(3,2,4,4)}$ décrit l'opérateur qui produit un décalage temporel de 3 unités à $t \in 4\mathbb{Z}$, de 2 unités à $t \in 4\mathbb{Z} + 1$ etc.*

Exemple 4. *Avec cette notation, l'opérateur Δ^3 s'écrit donc également $\delta^{(0,2,1)}$. Inversement, à condition que la séquence vérifie $\forall t, \langle s \rangle(t) \geq \langle s \rangle(t-1) - 1$, on peut formuler $\delta^{(s)}$ à l'aide des opérateurs de $\mathcal{T}[\gamma]$. Par exemple, $\delta^{(2,3,2)} = \delta^2 \Delta_3 \delta^{-2} \oplus \delta^1 \Delta_3$. A noter que l'opérateur δ^t est un opérateur 1-périodique, $\delta^{(3)} = \delta^3$.*

À la différence de $\mathcal{E}[\delta]$, les séries de $\mathcal{T}[\gamma]$ peuvent être additionnées sans condition, puisqu'on ne considère que les séries ayant un gain temporel⁷ de 1 (tous les opérateurs considérés ici conservent la même horloge/unité de temps). Les séries de $\mathcal{T}[\gamma]$ peuvent donc s'écrire sous la forme $s = \bigoplus_i \delta^{t_i} \Delta_T \delta^{t_i} \gamma^{n_i}$. On obtient alors un résultat équivalent à la Prop.4, sans les contraintes de gain. C'est-à-dire la somme, le produit et l'étoile de Kleene de séries ultimement périodiques de $\mathcal{T}[\gamma]$ sont ultimement périodiques.

Proposition 8. *Les séries rationnelles de $\{\varepsilon, e, \gamma^1, \delta^1, \Delta_T\}$ ont une écriture ultimement périodique sur $\mathcal{T}[\gamma]$.*

Preuve: En utilisant les mêmes arguments que pour les séries de $\mathcal{E}[\delta]$, on obtient le dual de la Prop.4, à savoir : la somme, le produit et l'étoile de Kleene de séries ultimement périodiques de $\mathcal{T}[\gamma]$ sont ultimement périodiques. Puisque γ^1, δ^1 et Δ^T sont des séries périodiques particulières, les expressions rationnelles sur ces opérateurs sont ultimement périodiques également. \square

La librairie ETVO contient les classes suivantes pour gérer les séries de $\mathcal{T}[\gamma]$: la classe `etvo::Fmaxp` gère les fonctions D/D périodiques (qui permettent les calculs de T-opérateurs), la classe `etvo::T_op` gère les T-opérateurs, la classe `etvo::Tg` décrit les monômes, `etvo::polyTg` décrit les polynômes et `etvo::seriesTg` les séries ultimement périodiques. On dispose également d'une décomposition du type de celle décrite section 3.3.

6. La périodicité est implicite

7. On pourrait également étendre aux systèmes ayant plusieurs horloges et donc plusieurs unités de temps (voir la section 2.2).

5 Exemples

En guise d'illustration, on montre dans cette section comment utiliser la librairie ETVO pour calculer les fonctions de transfert de deux systèmes (ceux décrits Fig.5 et Fig.7), l'un est *event-variant* et l'autre *time-variant*. Dans les deux cas, on part d'une représentation où $x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)'$ est le vecteur des signaux internes du système, u le vecteur des entrées et y celui des sorties. La dynamique du système s'écrit alors

$$x = Ax \oplus Bu, y = Cx.$$

Pour le GET valué Fig.5, le système est décrit sur $\mathcal{E}[[\delta]]$ par

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \beta_3 \gamma^5 \mu_2 \\ \delta^2 \mu_3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \beta_2 \delta^5 & \varepsilon \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}, C = (\varepsilon \ \beta_2 \ \varepsilon \ \gamma^1).$$

La relation entrée-sortie s'exprime $y = Hu = CA^*Bu$. Le programme C++ de calcul de H est donné ci-dessous. La classe `etvo::matrix<T>` étend les opérations aux matrices d'éléments pour $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$, $\mathcal{E}[[\delta]]$ et $\mathcal{T}[[\gamma]]$. On retrouve logiquement le même résultat que celui obtenu à la fin de la section 3. C'est un système *event-variant* (4,3)-cyclique, qui vérifie donc $H\gamma^4 = \gamma^3H$.

```
...
int main(){
matrix<seriesEd> A(4,4), B(4,1), C(1,4);
B(0,0)=eb(2); C(0,1)=eb(2); C(0,3)=eg(1); A(0,3)=eb(3)*eg(5)*em(2);
A(1,0)=em(3)*ed(2); A(2,1)=eg(0); A(3,2)=eb(2)*ed(5);
matrix<seriesEd> H=C*A.star()*B; // H de taille 1x1
H(0,0).toRight();
std::cout << H(0,0) << "\n";
//((m3.b4.g2+g1.m3.b4).d2+(g1.m3.b4.g2+g2.m3.b4).d7).[g2.d7]*
}
```

Considérons désormais la Fig.7 où un GET avec des temps de séjour variables est décrit. Les temps de séjour sont exprimés par des séquences périodiques reportées sur le graphe. Dans $\mathcal{T}[[\gamma]]$, les matrices qui relient les signaux du système sont données par

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma^2 \\ \delta^1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \delta^{(2,3,2)} & \varepsilon \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \Delta_3 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}, C = (\varepsilon \ \delta^{(1,0)} \ \varepsilon \ \gamma^1).$$

Le calcul du transfert $G = CA^*B$ montre que ce système est *time-variant* et 6-cyclique, soit $G\delta^6 = \delta^6G$. Pour cet exemple, on obtient $G = \delta^{(1,4,3,2,3,2)}\gamma^0 \oplus (\delta^{(4,6,5)}\gamma^1 \oplus \delta^{(5,8,7,6,7,6)}\gamma^2)(\delta^3\gamma^2)^*$.

```
...
int main(){
matrix<seriesTg> A(4,4), B(4,1), C(1,4);
B(0,0)=td(3); C(0,1)=td({1,0}); C(0,3)=tg(1); A(0,3)=tg(2);
A(1,0)=td(1); A(2,1)=td(0); A(3,2)=td({2,3,2});
matrix<seriesTg> G=C*A.star()*B;
G(0,0).toRight();
std::cout << "G(0,0)=" << G(0,0) << "\n";
//G(0,0)=(((d-1.D6+d1.D6.d-3).g0) + (d4.D3.g1+(d3.D6+d5.D6.d-3).g2).[d3.g2]*
std::cout << "G(0,0)=" << G(0,0).toStringAsDeltaVar() << "\n";
//G(0,0)=((d<1,4,3,2,3,2>.g0)+(d<4,6,5>.g1+d<5,8,7,6,7,6>.g2).[d3.g2]*
}
```

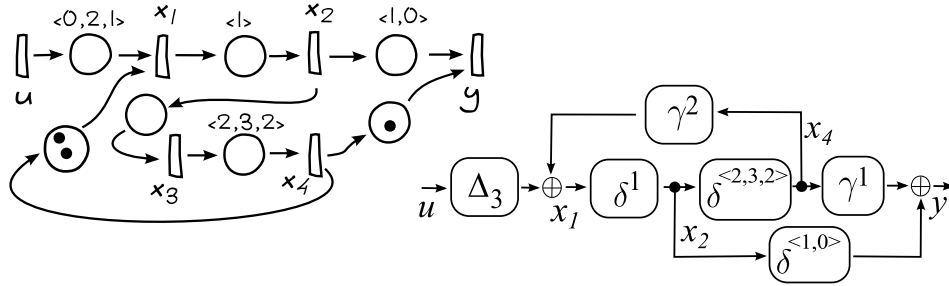


FIGURE 7 – Schéma-bloc associé à un GET à temps de séjour variable

6 Conclusion

Ce papier rappelle des éléments de modélisation pour des Systèmes à Evénements Discrets décrits au moyen d'opérateurs élémentaires. Dans les modèles considérés, les opérateurs sont combinés uniquement par synchronisation et composition. Cette approche permet de couvrir la modélisation des Graphes d'Evénements Temporisés (GET) ordinaires (systèmes (max,+) linéaires), des GET valués (systèmes avec une cyclicité événementielle) et des GET avec des temps de séjour variant cycliquement (systèmes avec une cyclicité temporelle). Pour exploiter ces modèles, la bibliothèque logicielle ETVO (Event | Time Variant Operators) a été développée afin d'automatiser le calcul des séries de transfert. Cette bibliothèque, qui englobe et étend la bibliothèque MinMaxGD, permet d'aborder des problèmes d'évaluation de performance (calcul de transfert) et de calcul de contrôleurs s'appuyant sur la théorie de la résiduation. Il reste à étendre la bibliothèque ETVO pour prendre en compte simultanément tous les opérateurs γ^n , δ^t , μ_m , β_b , \mathbb{W}_m , \mathbb{A}_d . Sur le plan théorique, les systèmes obtenus sont à la fois time-variant et event-variant et leur étude détaillée est présentée dans la thèse de J.Trunk[12].

Références

- [1] François Baccelli, Guy Cohen, Geert Jan Olsder, and Jean-Pierre Quadrat. Synchronization and linearity : an algebra for discrete event systems. 1992.
- [2] Guy Cohen, Pierre Moller, J-P Quadrat, and Michel Viot. Algebraic tools for the performance evaluation of discrete event systems. *Proceedings of the IEEE*, 77(1) :39–85, 1989.
- [3] Bertrand Cottenceau, Laurent Hardouin, and Jean-Louis Boimond. Modeling and control of weight-balanced timed event graphs in dioids. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(5) :1219–1231, 2014.
- [4] Robert de Groote, Jan Kuper, Hajo Broersma, and Gerard JM Smit. Max-plus algebraic throughput analysis of synchronous dataflow graphs. In *2012 38th Euromicro Conference on Software Engineering and Advanced Applications*, pages 29–38. IEEE, 2012.
- [5] Stéphane Gaubert. *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes*. PhD thesis, Paris, ENMP, 1992.
- [6] Stéphane Gaubert. Performance evaluation of (max,+) automata. *IEEE transactions on automatic Control*, 40(12) :2014–2025, 1995.
- [7] Stéphane Gaubert and Carlos Klimann. Rational computation in dioid algebra and its application to performance evaluation of discrete event systems. In *Algebraic computing in control*, pages 241–252. Springer, 1991.

- [8] Laurent Hardouin, Bertrand Cottenceau, and Mehdi Lhommeau. Minmaxgd, a toolbox to handle periodic series in semiring $\min\max[[g,d]]$, 2013.
- [9] Laurent Hardouin, Bertrand Cottenceau, Ying Shang, Jörg Raisch, et al. Control and state estimation for max-plus linear systems. Foundations and Trends® in Systems and Control, 6(1) :1–116, 2018.
- [10] Jan Komenda, Sébastien Lahaye, and Jean-Louis Boimond. Supervisory control of $(\max,+)$ automata : A behavioral approach. Discrete Event Dynamic Systems, 19(4) :525, 2009.
- [11] Jean-Yves Le Boudec and Patrick Thiran. Network calculus : a theory of deterministic queuing systems for the internet, volume 2050. Springer Science & Business Media, 2001.
- [12] Johannes Trunk. On the Modeling and Control of extended Timed Event Graphs in Dioids. PhD thesis, Angers/Berlin, 2019.
- [13] Johannes Trunk, Bertrand Cottenceau, Laurent Hardouin, and Jörg Raisch. Model decomposition of weight-balanced timed event graphs in dioids : Application to control synthesis. IFAC-PapersOnLine, 50(1) :13453–13460, 2017.
- [14] Johannes Trunk, Bertrand Cottenceau, Laurent Hardouin, and Jörg Raisch. Model decomposition of timed event graphs under partial synchronization in dioids. IFAC-PapersOnLine, 51(7) :198–205, 2018.